

Kalkulus tizenhatodik feladatsor - megoldások

Határozatlan integrál

1. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

- a) $\int 1 + x + x^2 + 4x^3 + 3x^4 \, dx$
- b) $\int x^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{3x^5}} + \frac{x^e}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$
- c) $\int \frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{x^2} \, dx$

Megoldás:

A következő integrálási szabályt használjuk:

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

($C \in \mathbb{R}$ tetszőleges), emellett $\int(f + g) = \int f + \int g$ és $\int(cf) = c \int f$, ($c \in \mathbb{R}$).

a) Az integrált tagjaira bontjuk, a konstansszorzókat kiemeljük, a tagokat egyenként hatványalakra hozzuk, majd külön-külön használjuk az első integrálási szabályt.

$$\begin{aligned} \int 1 + x + x^2 + 4x^3 + 3x^4 \, dx &= \\ \int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + 4 \int x^3 \, dx + 3 \int x^4 \, dx &= \\ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^5}{5} &= \\ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^4 + \frac{3}{5}x^5 + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Az előző feladat sémáját követjük.

$$\begin{aligned} \int x^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{3x^5}} + \frac{x^e}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx &= \\ \int x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} x^{-\frac{4}{5}} + \frac{1}{2} x^e + x^{-\frac{1}{2}} \, dx &= \\ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \frac{5}{1} x^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2e+2} x^{e+1} + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c) Itt összeg helyett szorzat szerepel, ezek összevonhatóak egyetlen hatvánnyá.

$$\int \frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{x^2} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} x^{-2} \, dx = \int x^{-\frac{7}{6}} \, dx = -\frac{6}{1} x^{-\frac{1}{6}} + C, C \in \mathbb{R}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

- a) $\int (1+x)^5 \, dx$
- b) $\int e^{2x+1} \, dx$
- c) $\int \sqrt[3]{5x+1} \, dx$
- d) $\int \cos(3x+2) \, dx$
- e) $\int \frac{1}{\cos^2(5x+6)} \, dx$

- f) $\int \frac{1}{(4x+1)^2} dx$
 g) $\int \frac{1}{4x^2+1} dx$
 h) $\int \frac{1}{4x^2+4x+3} dx$
 i) $\int e^{2x+3} + \cos(2x) dx$
 j) $\int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}} dx$

Megoldás:

A következő integrálási szabályt használjuk:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, C \in \mathbb{R}, \text{ ahol } \int f(x) dx = F(x)$$

- b) Kihhasználjuk hogy $\int e^x dx = e^x$.
 $\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$.
- c) Kihhasználjuk, hogy $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
 $\int \sqrt[3]{5x+1} dx = \int (5x+1)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{5} \frac{3}{4} (5x+1)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{20} (5x+1)^{\frac{4}{3}} + C$.
- e) Kihhasználjuk, hogy $\int \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan(x)$.
 $\int \frac{1}{\cos^2(5x+6)} dx = \frac{1}{5} \tan(5x+6) + C$.
- f) Hatványalakra hozunk, és használjuk az erre tanult szabályt.
 $\int \frac{1}{(4x+1)^2} dx = \int (4x+1)^{-2} dx = \frac{1}{4} (-1) (4x+1)^{-1} = \frac{-1}{16x+4} + C$.
- h) Kihhasználjuk, hogy $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$.
 A nevezőt átalakítjuk:
 $4x^2+4x+3 = 4(x+\frac{1}{2})^2+2 = 2(2(x+\frac{1}{2})^2+1) = 2((\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+1) = 2((\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1)$.
 Így $\int \frac{1}{4x^2+4x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}) + C$.

3. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

- a) $\int \frac{1}{5x+1} dx$
 b) $\int \frac{8x+1}{4x^2+x} dx$
 c) $\int \frac{1}{(x^2+1)\arctan(x)} dx$
 d) $\int \frac{\sinh(3x+2)}{\cosh(3x+2)} dx$
 e) $\int \frac{x e^{x^2}}{1+e^{x^2}} dx$

Megoldás:

A következő integrálási szabályt használjuk:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C, C \in \mathbb{R}$$

- a) Bővítünk 5-tel, hogy a számlálóban a nevező deriváltja szerepeljen.
 $\int \frac{1}{5x+1} dx = \frac{1}{5} \int \frac{5}{5x+1} dx = \frac{1}{5} \ln |5x+1| + C$

- b) Mivel a számlálóban a nevező deriváltja szerepel semmilyen átalakításra nincs szükség, közvetlenül alkalmazható a szabály.

$$\int \frac{8x+1}{4x^2+x} dx = \ln |4x^2+x| + C$$

- d) A nevezőre az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva megkapjuk, hogy bővítenünk kell 3-mal, hogy a számlálóban a nevező deriváltja szerepeljen: $(\operatorname{ch}(3x+3))' = 3\operatorname{sh}(3x+3)$. Majd alkalmazhatjuk a szabályt.

$$\int \frac{\operatorname{sh}(3x+3)}{\operatorname{ch}(3x+3)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3\operatorname{sh}(3x+3)}{\operatorname{ch}(3x+3)} dx = \frac{1}{3} \ln |\operatorname{ch}(3x+3)| + C$$

4. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a) $\int \sin(x) \cos^5(x) dx$

b) $\int (x+3) \sqrt[5]{x^2+6x+5} dx$

c) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+5}} dx$

d) $\int \frac{1}{x \ln^3(x)} dx$

Megoldás:

A következő integrálási szabályt használjuk:

$$\int f'(x) f^\alpha(x) dx = \frac{1}{\alpha+1} f^{\alpha+1}(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

- a) Vegyük észre, hogy (-1) -et kiemelve a szabály közvetlenül alkalmazható, ugyanis $(\cos(x))' = \sin(x)$.

$$\int \sin(x) \cos^5(x) dx = - \int -\sin(x) \cos^5(x) dx = -\frac{1}{6} \cos^6(x) + C.$$

- c) Hatványalakra alakítás után látszik hogy $\frac{1}{3}$ kiemelésével a szabálynak megfelelő formába hozható az integrál, ugyanis $(3x^2+5)' = 6x$.

$$\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+5}} dx = \int 2x (3x^2+5)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \int 6x (3x^2+5)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} 2 (3x^2+5)^{\frac{1}{2}} + C.$$

- d) Hatványalakra alakítás után a szabály közvetlenül alkalmazható, ugyanis $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x \ln^3(x)} dx = \int \frac{1}{x} \ln^{-3}(x) dx = -\frac{1}{2} \ln^{-2}(x) + C.$$

5. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a) $\int x e^{x^2+1} dx$

b) $\int \frac{x^2+2x}{\cos^2(x^3+3x^2+2)} dx$

c) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

d) $\int \cos(x) e^{\sin(x)} dx$

e) $\int \frac{e^{4x}}{(1+e^{4x})^4} dx$

Megoldás:

A következő integrálási szabályt használjuk:

$$\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx = F(\phi(x)) + C, C \in \mathbb{R}, \text{ ahol } \int f(x) dx = F(x)$$

a) $\int x e^{x^2+1} dx$

Ebben a példában egy polinom van exponenciális függvénnyel megszorozva. A kitevő deriváltja:

$$(x^2 + 1)' = 2x.$$

Észrevehetjük, hogy a polinom ennek $\frac{1}{2}$ -szerese. Egyszerű átalakítással az integrál:

$$\frac{1}{2} \int (2x) \cdot e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)' \cdot e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int (\phi(x))' \cdot e^{\phi(x)} dx.$$

Tehát a belső függvény

$$\phi(x) = x^2 + 1,$$

a külső függvény pedig

$$f(\phi) = e^{\phi},$$

melynek primitív függvénye

$$F(\phi) = e^{\phi} + C.$$

Így a határozatlan integrál:

$$\int x e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int (\phi(x))' \cdot f(\phi(x)) dx = \frac{1}{2} F(\phi(x)) = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C.$$

b) $\int \frac{x^2+2x}{\cos^2(x^3+3x^2+2)} dx$

Ennél a példánál is olyan alakú az integrandus, hogy egy polinommal van szorozva egy függvény, melynek argumentumában szintén polinom szerepel. Az argumentumban szereplő polinom deriváltja:

$$(x^3 + 3x^2 + 2)' = 3x^2 + 6x.$$

Ennek megfelelően tudjuk átírni az integrált:

$$\frac{1}{3} \int (3x^2+6x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3 + 3x^2 + 2)} dx = \frac{1}{3} \int (x^3+3x^2+2)' \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3 + 3x^2 + 2)} dx,$$

és innen láthatjuk, hogy a belső függvény

$$\phi(x) = x^3 + 3x^2 + 2,$$

a külső függvény pedig

$$f(\phi) = \frac{1}{\cos^2 \phi},$$

melynek primitív függvénye

$$F(\phi) = \tan(\phi) + C.$$

Így a határozatlan integrál:

$$\int \frac{x^2 + 2x}{\cos^2(x^3 + 3x^2 + 2)} dx = \frac{1}{3} \tan(x^3 + 3x^2 + 2) + C.$$

e) $\int \frac{e^{4x}}{(1+e^{4x})^4} dx$

Ezt az integrált szorzatként az alábbi módon írhatjuk:

$$\int e^{4x} \cdot \frac{1}{(1+e^{4x})^4} dx = \int e^{4x} \cdot (1+e^{4x})^{-4} dx.$$

Ebben a kifejezésben az exponenciális függvény szerepel úgy is mint egy összetett függvény belső függvénye, és külön szorzótényezőként is. Ez alapján a belső függvény

$$\phi(x) = 1 + e^{4x},$$

deriváltja pedig $(1 + e^{4x})' = 4e^{4x}$. Így az integrandus

$$\frac{1}{4} \int 4e^{4x} \cdot (1 + e^{4x})^{-4} dx = \frac{1}{4} \int (1 + e^{4x})' \cdot (1 + e^{4x})^{-4} dx.$$

A külső függvény láthatóan

$$f(\phi) = \phi^{-4},$$

melynek primitív függvénye $F(\phi) = \frac{\phi^{-3}}{-3} + C$, ez alapján az integrál

$$\frac{1}{4} F(\phi(x)) = \frac{1}{4} \frac{(1 + e^{4x})^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{12(1 + e^{4x})^3} + C.$$

6. Határozza meg, hogy milyen típusú az integrál, majd számítsa ki a határozatlan integrált! (*Vegyes feladatok, Mo: Kónya 5.1 fejezet*)

a) $\int (2x + 3)^5 dx$

b) $\int \frac{1}{(2x+3)^5} dx$

c) $\int \frac{2}{9x+1} dx$

d) $\int \frac{2}{(9x+1)^2} dx$

e) $\int \frac{2}{9x^2+1} dx$

f) $\int \frac{2}{9x^2+3} dx$

g) $\int \frac{2x}{9x^2+3} dx$

h) $\int \frac{2x+4}{9x^2+3} dx$

i) $\int \frac{2}{9x^2+6x+3} dx$

j) $\int \frac{18x+8}{9x^2+6x+3} dx$

7. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat! (*Kónya 5.1 fejezet*)

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x-12}} dx$ (Mo: Kónya 84.o.)

b) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-12}} dx$ (Mo: Kónya 85.o.)

c) $\int \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-4x-12}} dx$ (Mo: Kónya 85.o.)

d) $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+6x+11}} dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2-2x}} dx$

Megoldás:

d) $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+6x+11}} dx$

Ezt a kifejezést felbontjuk két tag összegére. A gyökjel alatti kifejezés deriváltja $(x^2 + 6x + 11)' = 2x + 6$, tehát

$$\int \frac{4x + 12 - 12}{\sqrt{x^2 + 6x + 11}} dx = \int \frac{4x + 12}{\sqrt{x^2 + 6x + 11}} dx + \int \frac{-12}{\sqrt{x^2 + 6x + 11}} dx.$$

Az első integrált az előző példák alapján tudjuk meghatározni:

$$\int \frac{4x + 12}{\sqrt{x^2 + 6x + 11}} dx = 4 \int \frac{(x^2 + 6x + 11)'}{2\sqrt{x^2 + 6x + 11}} dx = 4\sqrt{x^2 + 6x + 11} + C.$$

A második tag esetén inverz trigonometrikus/hiperbolikus függvény lesz a primitív függvény. A polinomot elsőként teljes négyzetté kell alakítani:

$$\int \frac{-12}{\sqrt{x^2 + 6x + 11}} dx = \int \frac{-12}{\sqrt{(x+3)^2 + 2}} dx.$$

Ezután a gyökjel alatti konstans tag abszolútértékének gyökével egyszerűsítjük a törtet

$$\int \frac{\frac{-12}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{(x+3)^2}{2} + 1}} dx = -12 \int \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}} dx.$$

Ebben a formában egyből látható, hogy a

$$f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\phi^2 + 1}}$$

kifejezés külső függvényként szerepel, melynek primitív függvénye

$$F(\phi) = \operatorname{arsh}(\phi) + C.$$

Az argumentumban pedig

$$\phi(x) = \frac{x+3}{\sqrt{2}}$$

kifejezés jelenik meg belső függvényként, és ennek deriváltja a $\phi(x)' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tényező. A határozatlan integrál második fele tehát

$$-12 \operatorname{arsh}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Együtt

$$\int \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 6x + 11}} dx = 4\sqrt{x^2 + 6x + 11} - 12 \operatorname{arsh}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2-2x}} dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2-2x}} dx$$

Ennél a példánál a számlálóban nem szerepel x -es tag, így a teljes négyzetre alakítással kezdhetjük a megoldást:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-(x^2+2x+1)+4}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x+1)^2+4}} dx.$$

A konstans tag gyökével egyszerűsítjük a törtet

$$\int \frac{\frac{1}{\sqrt{4}}}{\sqrt{-\frac{(x+1)^2}{4}+1}} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}} dx.$$

Itt a

$$f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}}$$

külső függvényt fedezhetjük fel, melynek primitív függvénye

$$F(\phi) = \arcsin(\phi) + C.$$

A belső függvény $\phi(x) = \frac{x+1}{2}$, melynek deriváltja a $\phi(x)' = \frac{1}{2}$ tényező. A határozatlan integrál tehát

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2-2x}} dx = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

8. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

- a) $\int \cos^2(x) dx$
- b) $\int \sin^2(5x) dx$
- c) $\int \sin(x) \cos(x) dx$
- d) $\int \cos^5(x) \sin^2(x) dx$ (Mo: Kónya 93.o.)

Megoldás:

- a) $\int \cos^2(x) dx$
Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} \cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) &= \cos(2x). \end{aligned}$$

Ha összeadjuk a két egyenletet, és elosztjuk kettővel az eredményt, az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Az integrál tehát

$$\int \cos^2(x) dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos(2x)}{2} dx.$$

A második tag egy egyszerű összetett függvény:

$$\frac{1}{4} \int 2 \cdot \cos(2x) dx = \frac{1}{4} \int (2x)' \cdot \cos(2x) dx = \frac{1}{4} \sin(2x) + C.$$

A végeredmény tehát

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C = \frac{x + \sin(x) \cos(x)}{2} + C,$$

utolsó lépésként akár ki is fejthetjük a végeredményt egyszeres szögű tartalmazó szögfüggvényekkel (tetszőleges).

b) $\int \sin^2(5x) dx$

Itt hasonlóan a

$$\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$$

$$\cos^2(y) - \sin^2(y) = \cos(2y)$$

azonosságokat felhasználva a különbség felére kapjuk, hogy

$$\sin^2(y) = \frac{1 - \cos(2y)}{2}.$$

Ezt felhasználva $y = 5x$ behelyettesítéssel

$$\begin{aligned} \int \sin^2(5x) dx &= \int \frac{1 - \cos(10x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int 1 dx - \frac{1}{20} \int 10 \cos(10x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(10x)}{20} + C. \end{aligned}$$

c) $\int \sin(x) \cos(x) dx$

$$\int \sin(x) \cos(x) dx$$

Felhasználva, hogy $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$:

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = \frac{1}{4} \int 2 \cdot \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) + C$$